



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Q.1-

1- Dada $A_{n \times n}$ uma matriz real e $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_s\} \cup \{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_s\}$
o seu espectro, onde $\lambda_j \in \mathbb{R}$ para todo $1 \leq j \leq n$ e
 $\mu_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ para todo $1 \leq j \leq s$.
com $\text{Im}(\mu_j) > 0$.

Então A é similar a uma matriz bloco diagonal da forma:

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{J}(\lambda_2) & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & & \mathcal{J}(\lambda_n) & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 & & \mathcal{J}(\mu_1) \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & \mathcal{J}(\mu_s) \end{pmatrix}$$

Onde $\mathcal{J}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1(\lambda_j) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_2(\lambda_j) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{J}_r(\lambda_j) \end{pmatrix}$ e cada $\mathcal{J}_*(\lambda_j)$ é da forma

$$\mathcal{J}_*(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_j & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix}$$

isto é, λ_j na diagonal e 1 nos elementos acima da diagonal

E $\mathcal{J}(\mu_j) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1(\mu_j) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_2(\mu_j) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{J}_{b_j}(\mu_j) \end{pmatrix}$ é uma matriz bloco-diagonal,

e se $\mu_j = a_j + b_j i$ (e consequentemente $\bar{\mu}_j = a_j - b_j i$) cada bloco

$\mathcal{J}_*(\mu_j)$ é da forma: $\mathcal{J}_*(\mu_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j & 1 & 0 \\ -b_j & a_j & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_j & a_j & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_j & a_j & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_j & a_j & 0 & 1 \end{pmatrix}$, isto é,



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

uma matriz cuja diagonal são blocos $\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$
e os blocos acima da diagonal são $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Além disso, a forma canônica de Jordan é única,
ao menos de mudança na ordem dos blocos.

2) Sabemos que o polinômio característico de A é
$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^5 + 2\lambda^3 a + a^2 \lambda = \lambda \cdot (\lambda^4 + 2\lambda^2 a + a^2)$$
$$= \lambda \cdot (\lambda^2 + a)^2$$

Vamos separar em três casos dependendo de a :

2.1) Se $a=0$, então $p(\lambda) = \lambda^5$ e o único autovetor de A é 0 .

~~Se o maior bloco tem tamanho~~ Podemos dividir os casos pelo tamanho do maior bloco:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\max = 1 \times 1$ $\max = 2 \times 2$ $\max = 3 \times 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\max = 4 \times 4$ $\max = 5 \times 5$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

2.2) Se $a > 0$, neste caso, o espectro será

$$\sigma(A) = \{0, i\sqrt{a}, -i\sqrt{a}\}$$

O bloco de Jordan correspondente as raízes $i\sqrt{a}$ e $-i\sqrt{a}$ se pode ter tamanho 2 ou 4.

- Se tem tamanho 4:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \sqrt{a} & \\ & -\sqrt{a} & 0 & \\ & & & 0 & \sqrt{a} \\ & & & -\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & \sqrt{a} & & \\ & -\sqrt{a} & 0 & & \\ & & & 0 & \sqrt{a} \\ & & & -\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix}$$

- Se tem tamanho 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 & \sqrt{a} \\ & & & -\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 & \sqrt{a} \\ & & & -\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 & \sqrt{a} \\ & & & -\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix}$$

maior bloco de $f(0)$ é 1×1 maior bloco de $f(0)$ é 2×2 maior bloco de $f(0)$ é 3×3

2.3) Por fim se $a < 0$, então o espectro será

$$\sigma(A) = \{0, \sqrt{-a}, -\sqrt{-a}\} \text{ - Seja } b = \sqrt{-a}. \text{ Temos alguns casos:}$$

• $f(0)$ é uma matriz $3 \times 3 \Rightarrow f(b)$ e $f(-b)$ é matriz 1×1
Temos 3 casos.

• $f(0)$ é uma matriz $2 \times 2 \Rightarrow \begin{cases} f(b) \text{ é } 2 \times 2 \\ f(-b) \text{ é } 1 \times 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} f(b) \text{ é } 1 \times 1 \\ f(-b) \text{ é } 2 \times 2 \end{cases}$
 $\hookrightarrow$ temos $2 \cdot [2 + 2] = 8$ casos.

• $f(0)$ é uma matriz $1 \times 1 \Rightarrow \begin{cases} f(b) \text{ é } 1 \times 1 \\ f(-b) \text{ é } 3 \times 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} f(b) \text{ é } 2 \times 2 \\ f(-b) \text{ é } 2 \times 2 \end{cases}$
 $\hookrightarrow$ temos $1 \cdot [1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1] = 10$ casos.

Lembrando de se $f(\lambda)$ é 3×3 temos 3 casos: $\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$
Se $f(\lambda)$ é 2×2 temos 2 casos: $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}$ e se $f(\lambda)$ é 1×1 $f(\lambda) = \lambda$.



1.3] Note que o espectro de B é $\sigma(B) = \{1\}$, pelo Teorema da Forma canônica de Jordan, B é similar a uma matriz da forma:

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & J_2(1) & \\ & & \ddots \\ & & & J_t(1) \end{pmatrix}. \text{ Em particular } B \text{ é}$$

invertível, pois $0 \notin \sigma(B)$.

Suponha que $J_i(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ um bloco de tamanho $n_i \times n_i$.

Isso nos diz que existem vetores $v_1, v_2, \dots, v_{n_i}$ tais que

$$Bv_1 = v_1, Bv_2 = v_2 + v_1, Bv_3 = v_3 + v_2, \dots, Bv_{n_i} = v_{n_i} + v_{n_i-1}$$

$$\text{Logo } B^{-1}v_1 = v_1, \text{ e } v_i = B^{-1}v_i + B^{-1}(v_{i-1}) \Rightarrow B^{-1}v_i = v_i - B^{-1}(v_{i-1})$$

Basta mostrar que cada bloco $J_i(1)$ é similar ao bloco $J_i(1)^{-1}$, isso é verdade se $n_i = 1$ ou $n_i = 2$

$$\text{Pois } (1)^{-1} = 1 \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso geral: Note que o polinômio característico de B^{-1} também é $(t-1)^n$, pois $\sigma(B^{-1}) = \sigma(B)^{-1} = \{1^{-1}\} = \{1\}$

Seja $J_i(1)$ um bloco $n_i \times n_i$, Note que $I - J_i(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ & 0 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n_i \times n_i} \Rightarrow (I - J_i(1))^{n_i} = 0$

$$\Rightarrow J_i(1)^{-1} = \frac{1}{I - (I - J_i(1))} = I + (I - J_i(1)) + (I - J_i(1))^2 + \dots + (I - J_i(1))^{n_i-1}$$

$$\Rightarrow J_i(1)^{-1} \text{ tem a forma } \begin{pmatrix} 1 & * & & \\ 0 & 1 & * & \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ com } * \in \{ \pm 1 \} \text{ como } \text{Nuc}(I - J_i(1))$$

FAVOR NÃO ESCREVER NO VERSO!
NÃO ULTRAPASSAR A LINHA DA MARGEM!

Fazendo uma mudança na base de forma a eliminar, temos que cada $J_i(1)^{-1}$ vai ser similar a $J_i(1)$, o que implica de $B \sim B^{-1}$.



Questão 3

1- Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis iid com $E[X_i] = \mu$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < +\infty$, então

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2).$$

(onde a convergência significa convergência em distribuição).

2- Provar o TCL: Fazendo a substituição $Y_i = X_i - E[X_i]$, podemos assumir que $\mu = 0$ (pois $E[Y_i] = 0$ e $\text{Var}(Y_i) = \text{Var}(X_i)$).

Pelo Teorema da continuidade de Lévy, basta mostrar que

$$\frac{\varphi_{X_1 + \dots + X_n}(t)}{\sqrt{n}} \rightarrow e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad [\text{onde } \varphi_X(t) = E[e^{itX}] \text{ é}$$

a função característica de X].

$$\text{Mas } \varphi_{\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}}(t) = E\left[e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n)}\right] = E\left[\prod_{i=1}^n e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_i}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^n E\left[e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_i}\right], \text{ por independência}$$

$$= \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n, \text{ pois } (X_n)_{n \geq 1} \text{ é i.i.d.}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

$$\text{Mas } \varphi_{X_1}(t) = 1 + \mathbb{E}[X_1]t + \frac{\text{Var}(X_1)t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\text{Logo } \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Donde segue que } \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Como $e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ é a função característica de $N(0, \sigma^2)$
temos que $\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$

$$3. \text{ Note que } \mathbb{E}[X_j] = j^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} + j^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} = 0 \quad \text{e que}$$

$$\text{Var}(X_j) = \mathbb{E}[X_j^2] = (j^{-1/2})^2 = j^{-1} = \sigma_j^2$$

$$\text{Seja } S_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sim n \log n$$

$$\text{Vamos mostrar que } \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n \log n}} \rightarrow N(0, 1)$$

$$\text{Mostrando que } \varphi_{\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n \log n}}}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$$

$$\begin{aligned} \text{Note que } \varphi_{X_i}(t) &= \mathbb{E}[e^{itX}] = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{it}{\sqrt{j}}} + e^{-\frac{it}{\sqrt{j}}} \right] = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{j}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2j} + o\left(\frac{t^2}{j}\right)\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{Portanto, } \frac{\varphi_{X_1 + \dots + X_m}}{\sqrt{m \log n}}(t) &= \prod_{j=1}^m \varphi_{X_j}\left(\frac{t}{\sqrt{m \log n}}\right), \text{ por inoq. pndição} \\ &= \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{t^2}{2n \log n j} + o\left(\frac{t^2}{n \log n j}\right)\right) \\ &\approx e^{-\frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j n \log n} + \sum_{j=1}^m o\left(\frac{t^2}{(n \log n) j}\right)} \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \forall t\end{aligned}$$

pois como $2n \rightarrow +\infty$, podemos cotar o resto termo de resto para cada t fixo.

Com isso, pelo teorema da continuidade de Levy, temos que $\frac{X_1 + \dots + X_m}{\sqrt{m \log n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$

4. Mais uma vez, temos $E[X_j] = \frac{1}{2}j^\alpha - \frac{1}{2}j^\alpha = 0$ e

$\text{Var}(X_j) = E[X_j^2] = j^{2\alpha}$, podemos fazer a mesma conta do item 3, e a condição que vamos precisar é que

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n j^{2\alpha} = +\infty$, o que precisa que $2\alpha \geq -1 \Rightarrow \alpha \geq -\frac{1}{2}$

Seja $S_n^2 = \sum_{j=1}^n j^{2\alpha}$, o T.C.L neste caso será

$$\frac{X_1 + \dots + X_m}{S_n} \rightarrow N(0, 1).$$



Questão 2

1- ~~10~~

Rotacional - Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável cujo bordo é uma curva suave C . Dado um campo vetorial F

$$\iint_S \text{rot}(F) \cdot \vec{n} ds = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(onde $\text{rot}(F) = \nabla \times F$)

Divergência - Seja $R \subset \mathbb{R}^3$ uma região (tridimensional) do $\mathbb{R}^3$ cujo bordo é a superfície S , e seja $\vec{n}$ o vetor ^{normal} que aponta para fora de R em S . Dado um campo vetorial F

$$\iiint_R \text{div}(F) dR = \iint_S F \cdot \vec{n} ds$$

$$\text{onde } \text{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \nabla \cdot F$$

② Isso é simplesmente o teorema da divergência aplicado ao campo vetorial $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \nabla u$,

$$\text{pois } \text{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$$



{ portanto, $\iiint_R \Delta u \, dx \, dy \, dz = \iiint_R \operatorname{div}(\nabla u) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial R} \nabla u \cdot d\mathbf{n}.$

3.



$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \sin(\theta) \\ r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Sejam $S_1 = \{r = r_1\}$ e $S_2 = \{r = r_2\}$. Temos as parametrizações:

$$\varphi_2(\phi, \theta) = (r_2 \cos \phi \sin \theta, r_2 \sin \phi \sin \theta, r_2 \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi_2}{\partial \phi} = (-r_2 \sin \phi \sin \theta, r_2 \cos \phi \sin \theta, 0)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} = (r_2 \cos \phi \cos \theta, r_2 \sin \phi \cos \theta, -r_2 \sin \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi_2}{\partial \phi} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} = (-r_2^2 \cos \phi \sin^2 \theta, -r_2^2 \sin \phi \sin^2 \theta, -r_2^2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial \varphi_2}{\partial \phi} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \right\| = r_2^2 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (-\cos \phi \sin \theta, -\sin \phi \sin \theta, -\cos \theta)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (-\cos \phi \sin \theta, -\sin \phi \sin \theta, -\cos \theta)$$

Seja $\nabla u = (F_1, F_2, F_3)$; Seja $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(r, \phi, \theta) \mapsto (x, y, z)$, podemos recuperar

$$\nabla u \text{ como } \nabla u(\Phi(r, \phi, \theta)) \cdot D\Phi^{-1}(r, \phi, \theta) \rightarrow \text{que é uma função de } r, \phi, \theta \Rightarrow \iint_{S_2} \nabla u \cdot d\mathbf{n} = \iint_{S_2} \nabla u(\Phi(r, \phi, \theta)) \cdot D\Phi^{-1}(r, \phi, \theta) \cdot \vec{n} \, d\phi \, d\theta$$



Sejam $S_3 = \{\phi = \phi_1\}$ e $S_4 = \{\phi = \phi_2\}$

A parametrização

$$\psi_4(r, \theta) = (r \cos(\phi_2) \sin \theta, r \sin \phi_2 \sin \theta, r \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi_4}{\partial r} = (\cos(\phi_2) \sin \theta, \sin \phi_2 \sin \theta, \cos \theta)$$

$$\frac{\partial \psi_4}{\partial \theta} = (r \cos(\phi_2) \cos \theta, r \sin(\phi_2) \cos \theta, -r \sin \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi_4}{\partial r} \times \frac{\partial \psi_4}{\partial \theta} = (-r \sin \phi_2, r \cos(\phi_2), 0)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (-\sin \phi_2, \cos \phi_2, 0)$$

$$\Rightarrow \iint_{S_4} \vec{n} \cdot d\vec{n} = \iint \sin(\phi_2) \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \cos \phi_2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right] dr d\theta$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dx} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dy} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dy} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dy}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dz} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dz} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dz}$$

E por fim, para $S_5 = \{\theta = \theta_1\}$ e $S_6 = \{\theta = \theta_2\}$

A parametrização $\psi_6(r, \phi) = (r \cos(\phi) \sin \theta_2, r \sin \phi \sin \theta_2, r \cos \theta_2)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi_6}{\partial r} = (\cos \phi \sin \theta_2, \sin \phi \sin \theta_2, \cos \theta_2)$$

$$\frac{\partial \psi_6}{\partial \phi} = (-r \sin \phi \sin \theta_2, r \cos \phi \sin \theta_2, 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi_6}{\partial r} \times \frac{\partial \psi_6}{\partial \phi} = (-r \cos \phi \sin \theta_2 \cos \theta_2, -r \sin \phi \sin \theta_2 \cos \theta_2, r \sin^2 \theta_2)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (-\cos \phi \cos \theta_2, -\sin \phi \cos \theta_2, \sin \theta_2)$$